Ein rekursives kosmologisches Modell

Ingo Franz <ingofranz@gmx.net>

Zusammenfassung: Der Artikel behandelt die Geometrie eines kosmologischen Modells, in welchem keine Singularitäten auftreten und in dem eine eindeutige umkehrbare Abbildung zwischen dem Universum und einem Schwarzen Loch existiert. Dabei liegt der Fokus zunächst auf der Initialisierung der Transformation. Anschließend wird gezeigt wie die Metriken ineinander überführt werden.

Veröffentlicht: 2019-01-23

Version: 1

Schlüsselwörter: Lorentz-Transformation, Linienelement, Schwarzschild-Metrik, schwarzes Loch, rekursives kosmologisches Modell, Universum

Peer review: Karla Franz-Baumann

THINK LOUD
moringa.pub/ojs/index.php/think
ISSN 2567-3432

Besonderen Dank an Manfred Ellerich.

Voraussetzungen sind gute Kenntnisse der Lorentz-Transformation sowie ein prinzipielles Verständnis des Linienelementes und der Schwarzschild-Metrik.

Satz - 1: Spiegelung am Einheitskreis

Es existieren bijektive Abbildungen der reellen Zahlen zwischen 1 und ∞ in die reellen Zahlen zwischen 1 und 0, z.B. $f(r) = \frac{1}{r}$ oder $f(r) = \frac{1}{r^2}$.

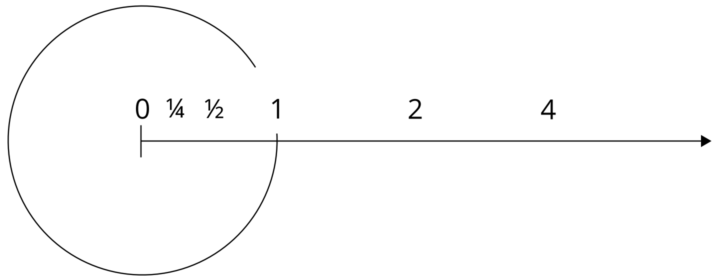


Abbildung 1:

Dies ermöglicht die prinzipielle Vorstellung, dass ein unendliches Universum in einem begrenzten Schwarzen Loch Platz finden könnte.

Satz - 2: Relativität von Streckung und Stauchung geometrischer Objekte

Bei der Änderung des Größenunterschiedes zweier geometrischer Objekte ist grundsätzlich nicht unterscheidbar, welches der Objekte seine Größe geändert hat.

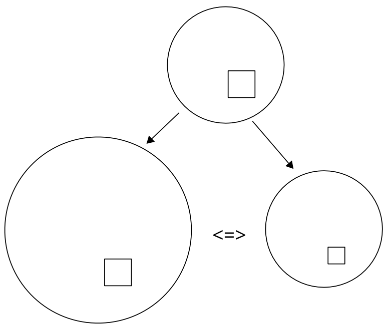
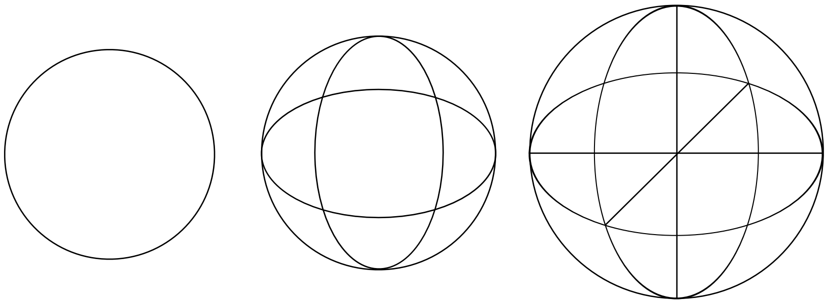


Abbildung 2:

Dies ermöglicht die prinzipielle Vorstellung, dass ein von innen expandierendes Universum in einem von außen konstant großen Schwarzen Loch stattfindet.

Die 4-dimensionale Hyperkugel



Kreis: Gebildet durch eine Strecke (Rand)

Kugel: Gebildet durch eine Fläche (Oberfläche)

Hyperkugel: Gebildet durch einen Raum (Hyperoberfläche)

Abbildung 3:

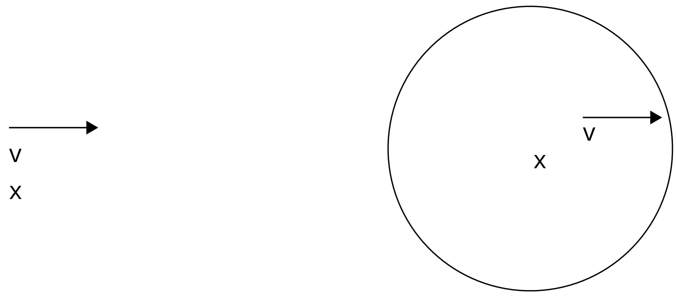
Definitionen:

A) Alle Punkte haben den gleichen Abstand zum Mittelpunkt

B) Der Mittelpunkt ist nicht Teil der Menge (des Randes, der Oberfläche, der Hyperoberfläche)

C) Bei Bewegung ohne Richtungswechsel kommt man wieder zum Ausgangspunkt

Die Lichtkugel



Licht wird ausgesendet (Mittelpunkt einer Hyperkugel)

Licht hat sich ausgebreitet, Lichtkugel ist entstanden und umschließt eine Hyperoberfläche (einen Raum zu einem Zeitpunkt)

Abbildung 4:

Nach der Lorentz-Transformation befinden sich die kräftefrei gegeneinander bewegten Beobachter x und v beide im Zentrum der Lichtkugel, genau wie alle inertialen Beobachter die sich, als das Licht ausgestrahlt wurde, an der gleichen Stelle befanden an der das Licht ausgestrahlt wurde.

Die Definitionen A) und B) gelten nach Lorentz-Transformation, C) würde gelten, wenn man mit Überlichtgeschwindigkeit den Lichtkreis durchbräche und dann auf der gegenüberliegenden Seite wieder in den selben Raum (die selbe Hyperoberfläche) eintreten würde.

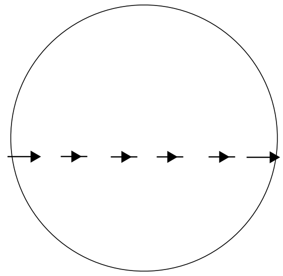


Abbildung 5:

Hypothese:

Das Universum ist eine Hyperkugel die sich mit c (Lichtgeschwindigkeit) ausbreitet (so wie eine Lichtkugel).

Das daraus entstehende Modell würde die prinzipiell beobachteten Eigenschaften des Urknallmodells aufweisen: Alle Galaxien bewegen, sich je weiter entfernt, desto schneller von uns fort und der Urknall war überall.

Um das Problem der Singularität bei diesem Modell zu vermeiden kann angenommen werden, dass das Universum nicht aus einer Singularität, sondern aus einem Zustand maximaler Dichte entstanden ist (Dmax). Das würde bedeuten, dass das Universum, als es entstand, bereits eine endliche Ausdehnung hatte.

In diesem Fall kann von einem beliebigen Punkt aus jedem Punkt im Universum eine Anfangsgeschwindigkeit v zugeordnet werden, welche sich, da alle Punkte der Hyperoberfläche als im zentrum befindlich angesehen werden können (siehe Lichtkugel), entlang des Radius der Hyperoberfläche, also entlang der Strecke des beliebigen Punktes zum Rand, linear zwischen 0 und c bewegt.

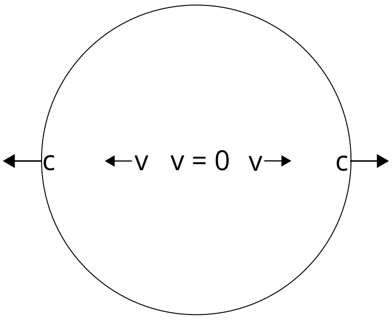


Abbildung 6: Universum entsteht bei Dmax

Analog dazu ist ein Schwarzes Loch, zu dem Zeitpunkt an dem es entsteht, ebenfalls als Hyperkugel vorstellbar, welche allerdings mit c kontrahiert und in der sich jeder Punkt mit einer Geschwindigkeit v linear zwischen 0 und c entlang des Radius auf den Mittelpunkt zu bewegt.

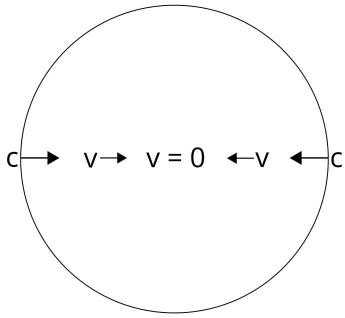


Abbildung 7: Schwarzes Loch entsteht bei Dmax

Nun kann man annehmen, dass dieser Zustand des Schwarzen Lochs ebenfalls die maximale Dichte das Schwarzen Lochs darstellt und es sich nicht weiter komprimieren lässt.

In dem Moment in dem das Schwarze Loch entsteht, fangen die Abstände im Inneren an zu wachsen, so dass es sich von innen gesehen mit c ausdehnt, während es von außen gesehen gleich groß bleibt (Satz - 2).

Das bedeutet, man kann den Zustand maximaler Dichte über die Lorentz- Transformationen der unterschiedlichen Geschwindigkeiten zwischen 0 und c intitialisieren. Dabei kehren die Gechwindigkeiten ihre Richtung um, in dem Moment in dem Dmax entsteht.

Dabei tritt das Problem auf, dass sich die jeweiligen vom Betrag her gleichen Geschwindigkeiten nicht ohne weiteres durch die Lorentz-Transformationen abbilden lassen. Zum einen (Problem - 1) würde es für einen hypothetischen Beobachter B2 im Inertialsystem des Beobachters B1, der sich (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) als im Mittelpunkt des Intervalls maximaler Dichte befindlich ansieht so aussehen, als würde die Zeit während des Übergangs vom Schwarzen Loch zum Universum rückwärts laufen (nach der Lorentz-Transformation gilt: alle Uhren im bewegten Inertialsystem sind entgegen der Bewegungsrichtung vorgestellt und mit der Bewegungsrichtung zurückgestellt - Relativität der Gleichzeitigkeit).

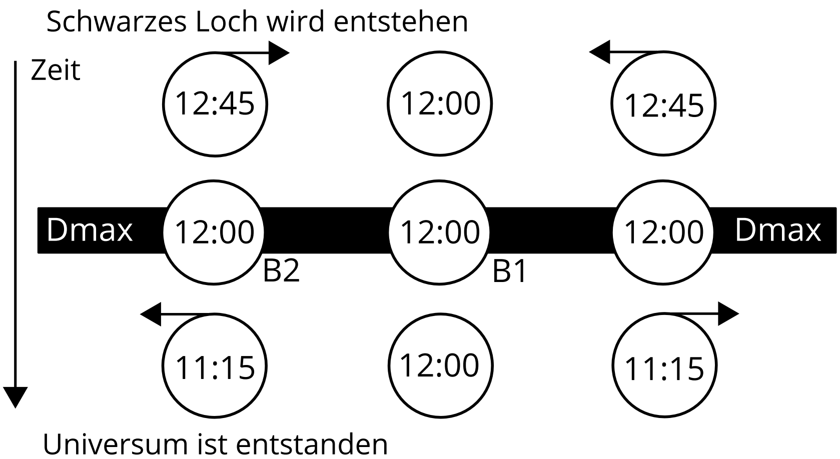


Abbildung 8:

Zum Anderen (Problem - 2) würden sich die bewegten Inertialsysteme an der Stelle von B2 in einem Zustand größerer Dichte als Dmax befinden.

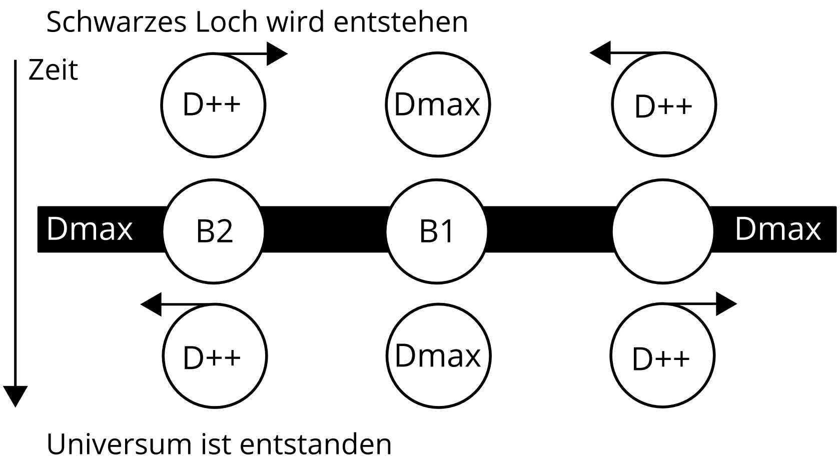


Abbildung 9:

Problem - 1

Da es sich bei den zu betrachtenden Zeitpunkten lediglich um die Koordinatenzeiten der jeweiligen Inertialsysteme handelt, welche beim Entstehen des Schwarzen Lochs über die innere Lösung der Schwarzschild-Metrik aus den in Bezug auf ihre Bewegung im Gravitationsfeld kräftefreien Systemen hervorgehen, ist es ausreichend, sich beim Übergang den jeweiligen physikalischen Zustand an dieser Stelle anzusehen, welcher aufgrund der Symmetrie der Lorentz-Transformation identisch ist (Die Uhren sind gegen die Bewegungsrichtung um den gleichen Wert vorgestellt um den sie mit der Bewegungsrichtung zurückgestellt sind, bzw. beide Dichten sind gleich groß, die eine schon, die andere noch). Das bedeutet, dass es bei der Betrachtung dieser Stelle nicht zu einer rückläufigen Zeit kommt, sondern lediglich zu einer sich ändernden, aber stetig verlaufenden Sichtweise (man könnte sagen, erst ist das Glas halb voll, dann ist es halb leer, aber in jedem Fall befindet sich die Hälfte des Inhalts im Glas).

Problem - 2

Da es sich bei dem Beobachter B2 lediglich um einen hypothetischen Beobachter handelt (im Inertialsystem von Beobachter B1 befindet sich an der Stelle von B2 keine Materie), muss sich Beobachter B1 an die Stelle von B2 begeben, um zu beurteilen welche Dichte dort herrscht.
Wenn man nun den Übergang vom entstehenden Schwarzen Loch zum Schwarzen Loch betrachtet stellt man fest, dass die Dichte an der Stelle an der sich B1 befindet zunächst noch kleiner als Dmax (D–) und an der Stelle des hypothetischen Beobachters B2 schon größer als Dmax (D++) ist. Das bedeutet bei stetiger Dichte, dass es dazwischen einen Punkt mit Dmax geben muss.

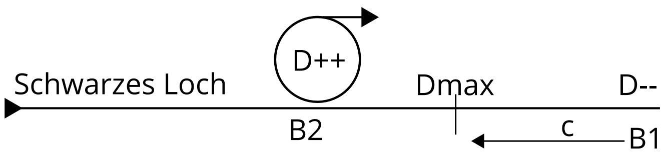


Abbildung 10:

B1 kann sich maximal mit c bewegen und muss Dmax passieren um B2 zu erreichen. Ab dem Moment, in dem er Dmax erreicht, ändern sich die Richtungen der Geschwindigkeiten und die Materie an der Stelle von B2 entfernt sich von B1.

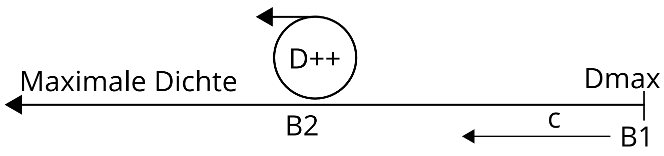


Abbildung 11:

Nach der Lorentz-Tranformation ist es nicht möglich die sich entfernende Materie zu erreichen bevor sich ihre Dichte in einem Zustand kleiner Dmax befindet.

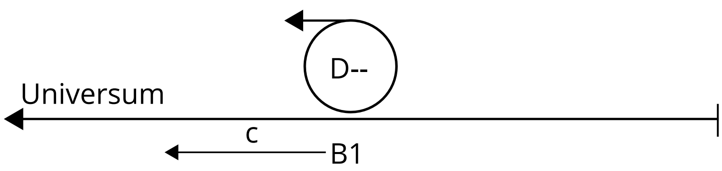


Abbildung 12:

Die sich entfernende und aufgrund der Relativität der Gleichzeitigkeit zurückgestellte Uhr wird beim Eintreffen von B1 niemals einen früheren Zeitpunkt anzeigen können als den, der in ihrem Inertialsystem an der Stelle stattfand an der B1 bei Dmax gestartet ist (Uhren laufen in der Lorentz-Transformation niemals rückwärts).

Anmerkung zum Mittelpunkt eines Schwarzen Lochs von außen betrachtet:

Bei Betrachtung der Oberfläche einer Kugel auf einem Foto hat der 2-dimensionale Kreis einen Mittelpunkt, die 2-dimensionale Oberfläche der 3-dimensionalen Kugel aber nicht, d.h. der Mittelpunkt existiert nur in der Projektion.

Analog dazu kann ein Schwarzes Loch, eingebettet in einen Raum, folgendermaßen betrachtet werden: Die 3-dimensionale Kugel hat einen Mittelpunkt, der 3-dimensionale Raum (Hyperoberfläche) der 4-dimensionalen Hyperkugel jedoch nicht, d.h. der Mittelpunkt existiert ebenfalls nur in der Projektion.

Untersuchung der Hypothese

Bei der Untersuchung der Hypothese, das Universum sei eine Hyperkugel in Bezug auf Definition C, lässt sich folgendes feststellen:

Es gibt eine vom Betrag her konstante Beschleunigung a, mit der man vom Inertialsystem des Beobachters B1 aus, den Ort welcher sich mit c entfernt, also einen Ereignishorizont (EH) erreicht und mit der man anschließend wieder im Ausgangs-Inertialsystem an der gleichen Stelle ankommt. Zwar wird beim Ausführen dieser Beschleunigung am Ereignishorizont c überschritten, dennoch lässt sich diese Beschleunigungsfunktion mathematisch definieren.

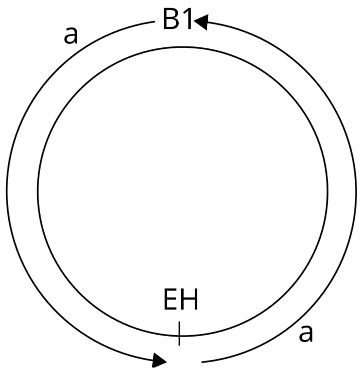


Abbildung 13:

Beim Ausführen dieser Funkton würde man allerdings an zwei Punkten dies- und jenseits des Ereignishorizontes feststellen, dass in beiden Fällen physikalisch mit unendlicher Beschleunigung auf den Ereignishorizont zu beschleunigt werden müsste um ihn zu erreichen.

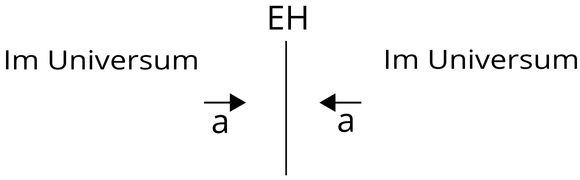


Abbildung 14:

Dies widerspräche der Vorstellung, dass das Universum von der anderen Seite des Ereignishorizontes als Schwarzes Loch betrachtet wird, denn in diesem Fall müsste man auf der anderen Seite des Ereignishorizontes physikalisch mit unendlicher Beschleunigung vom Ereignishorizont weg beschleunigen um ihn nicht zu erreichen.

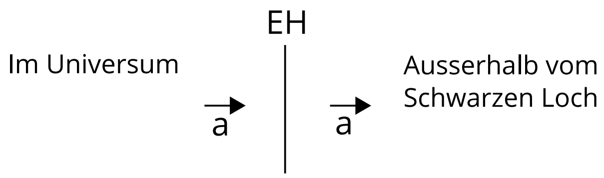


Abbildung 15:

Dies entspricht einer Änderung der Krümmungsrichtung am Ereignishorizont, woraus folgt, dass das Univerum eine Hyperhalbkugel ist, welche durch den Ereignishorizont geschnitten wird und auf deren anderer Hälfte sich ein Hypertrichter befindet.

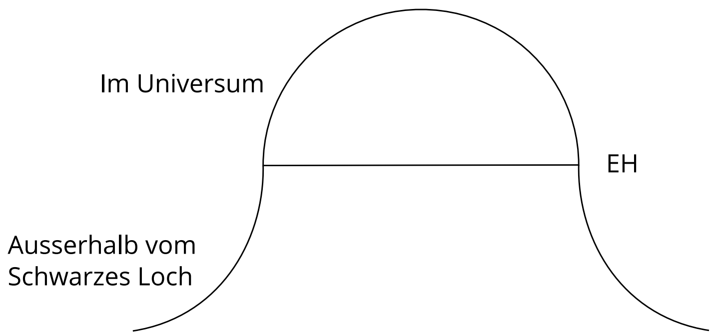


Abbildung 16:

Mathematische Herleitung

Ein mit c expandierendes Universum lässt sich schematisch zum Zeitpunkt T, an dem es mit endlicher bzw. maximaler Dichte entsteht, folgendermaßen darstellen.

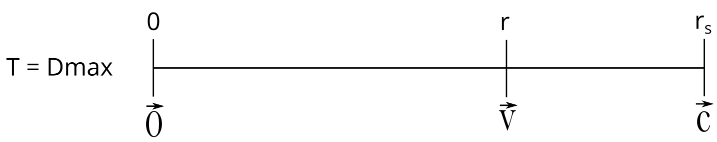


Abbildung 17:

Wobei r_s den Abstand zum Ereignishorizont bezeichnet. Dabei bewegen sich die Expansionsgeschwindigkeiten v linear zwischen 0 und c und es gilt für alle Punkte r zwischen 0 und r_s:

$$v = \frac{rc}{r_s}$$

Wenn man die Formel für den Zeigerstand Z einer relativistisch beschleunigten Uhr

$$Z = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{v\left(t\right)^2}{c^2}}\, dt$$

bzw. die Formel für den Kilometerstand K eines relativistisch beschleunigenden Laufbandes

$$K = \int_0^S \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v(s)^2}{c^2}}}\, ds$$

zugrunde legt, ergibt sich mit $v(t) = v(r) = v(s) = v$ die Metrik der Hyperoberfläche einer mit c expandierenden Hyperkugel zu

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dr^2$$

Diese Metrik geht lokal für v gegen 0 über in die flache kartesische Minkowski-Metrik:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2$$

Durch Ersetzung mit $v = \frac{rc}{r_s}$ ergibt sich zum Zeitpunkt $T = Dmax$:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r^2}{r_s^2}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r^2}{r_s^2}} dr^2$$

Nun lässt sich jeder Punkte r, diesseits von r_s einem Punkt R, jenseits von r_s zuordnen.

Abbildung 18:

NachSatz - 1 ergibt sich, insbesondere bei Skalierung für $r_s = 1$, und allgemein mit

$$r = \sqrt{\frac{r_s^3}{R}}$$

die äußere Lösung der Schwarzschild-Metrik zu:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{R}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{R}} dr^2$$

Für Zeitpunkte t größer $T = Dmax$ gilt, bei Betrachtung von innen also diesseits von r_s aufgrund der Expansion

$$r = r(t) = r(0) + vt \quad \text{und} \quad r_s = r_s(t) = r_s(0) + ct$$

wobei r_s von außen betrachtet also jenseits von r_s konstant bleibt (Satz - 2).

Daraus ergibt sich für

$$R = \frac{r_s r_s(t)^2}{r(t)^2}$$

wiederum die Metrik der Hyperoberfläche einer mit c expandierenden Hyperkugel zu

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r(t)^2}{r_s(t)^2}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r(t)^2}{r_s(t)^2}} dr^2$$

Anmerkung:
Da alle angeführten Metriken kugelsymmetrisch sind, können ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Winkel der Polarkoordinaten auf 0 gesetzt werden.

Ausblick:
Es ist zu untersuchen, in wie weit sich der Faktor $\frac{1}{2}$ unter dem Quadrat des zeitlichen Summanden der inneren Schwarzschild-Lösung, wenn man sie gegen den Ereignishorizont konvergieren lässt, auf das Modell auswirkt.